22/11/2017.

Δύο νόρμες $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ λέγονται ισοδύναμες ή συγκρίσιμες. Αν υπάρχουν θετικοί $m$ και $M$ τέτοιοι ώστε:

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\frac{1}{M}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|'$$

Αποδεικνύεται ότι όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες στον $\mathbb{R}^n$.

→ Μια ακολουθία διανυσμάτων $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}^n$. Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = x$ ή $x_k \to x$ ως προς μια νόρμα του $\mathbb{R}^n$.

## Νόρμες πινάκων

Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ είναι μια νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$ αν ισχύουν:

i) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$.

iii) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Τριγωνική)

iv) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (πολλαπλασιαστική)

## Φυσικές νόρμες

Έστω $\|\cdot\|$ μια διανυσματική νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε η ποσότητα

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$, ορίζει μια νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$ του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Αποδεικνύεται ότι supremum μπορεί να αντικατασταθεί με max.
Από τον ορισμό έχουμε ότι $||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x||$

Οι φυσικές νόρμες που παράγονται από τις $\ell_1, \ell_2$ και $\ell_\infty$ είναι $||A||_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$||A||_2 = (\rho(A^T A))^{\frac{1}{2}}$, όπου
$\rho(B) = \max\{|\lambda| : Bx = \lambda x, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$,
η φασματική ακτίνα του B.
$||A||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Δείκτης ή αριθμός κατάστασης: ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, ως προς μια φυσική νόρμα, ορίζεται ως $\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$.
αν A μη αντιστρέψιμος, τότε $\kappa(A) = \infty$

Αν ο δείκτης κατάστασης του A είναι πολύ μεγάλος λέμε ότι το γρ. σύστημα $Ax=b$ έχει κακή κατάσταση με την έννοια ότι μικρά σφάλματα κατά τους υπολογισμούς, επιφέρουν μεγάλα σφάλματα στην λύση.

Επαναληπτικές μέθοδοι:
Βασίζονται στην κατασκευή μιας ακολουθίας διανυσμάτων $(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$, τέτοιας ώστε αν συγκλίνει να συγκλίνει στην λύση x του συστήματος $Ax=b$
Δύο βασικές μέθοδοι είναι οι Jacobi και η Gauss-Seidel. Αυτές βασίζονται στην λύση της i εξίσωσης ως προς xi. Απαραίτητη προϋπόθεση: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right]$$

Οδηγούμαστε στην αναδρομή σχέση

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right],$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετ

Δημιουργείται ακολουθία $\left((x)^{(m)}\right)_{m=0}^{\infty}$ της επαναλ. μεθόδου Jacobi

~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o

Gauss-Seidel.

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right]$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Να γίνουν 3 επαναλήψεις των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel, για την λύση του συστήματος.

$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$-x_2 + 2x_3 = 1$$

παίρνοντας $x^{(0)} = 0$.

Jacobi

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[1 + x_2^{(m)}\right]$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[x_1^{(m)} + x_3^{(m)}\right]$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[1 + x_2^{(m)}\right]$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Gauss - Seidel

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[1 + x_2^{(m)}\right]$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)}\right]$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[1 + x_2^{(m+1)}\right]$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{13}{16} \\ \frac{13}{16} \\ \frac{29}{32} \end{pmatrix}.$$

Jacobi γράφεται ως $Dx^{(m+1)} = (L+U)x^{(m)} + b$, όπου

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & O \\ & a_{22} & \\ O & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & & & O \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1}b$$

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ η Gauss-Seidel:

$$Dx^{(m+1)} = Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)} + b$$

$$\Leftrightarrow \quad (D-L)x^{(m+1)} = Ux^{(m)} + b$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{(m+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(m)} + (D-L)^{-1}b$$